

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра строительной механики

КУРСОВАЯ РАБОТА

**ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Теория упругости с основами теории пластичности и
ползучести»**

на тему: «Плоская задача теории упругости»

Выполнил:

Логинов Роман Сергеевич
(Ф.И.О)

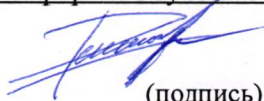
Студент 3 курса, группы СУЗ – 231

направление подготовки / специальность

Строительство уникальных зданий и сооружений

направленность (профиль) / специализация

Строительство автомагистралей, аэродромов и специальных
сооружений, очной формы обучения



(подпись)

Руководитель работы:

Резунов Александр Васильевич

(Ф.И.О., должность, кафедра)

Доцент кафедры строительной механики

Работа допущена к защите



(подпись руководителя)

17.12.25

(дата)

Работа выполнена и защищена с
оценкой

отлично

(оценка)

17.12.25

(дата)

Воронеж 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Упражнение №1. Составление уравнений на поверхности пластинки...	3
Упражнение №2. Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия	6
Упражнение №3. Решение плоской задачи теории упругости с помощью функции напряжений... ..	11
Упражнение №4. Расчёт балки-стенки.....	20

Упражнение №1. Составление уравнений на поверхности пластинки

A (0,0;0,0)

B (1,5;4,5)

C (5,5;2,0)

D (6,5;0,0)

Общий вид уравнений на поверхности:

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{cases}$$

$$l = \cos \angle x, n$$

Найдем длины граней и тригонометрические функции углов α , β и γ :

$$L_{AB} = \sqrt{(1,5)^2 + (4,5)^2} = 4,74 \text{ м}$$

$$L_{BC} = \sqrt{(2,5)^2 + 4^2} = 4,72 \text{ м}$$

$$L_{CD} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,24 \text{ м}$$

$$\cos \alpha = \frac{4,5}{4,74} = 0,95$$

$$\sin \alpha = \frac{1,5}{4,74} = 0,32$$

$$\cos \beta = \frac{2,5}{4,72} = 0,53$$

$$\sin \beta = \frac{4}{4,72} = 0,85$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{2,24} = 0,89$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{2,24} = 0,45$$

Грань АВ

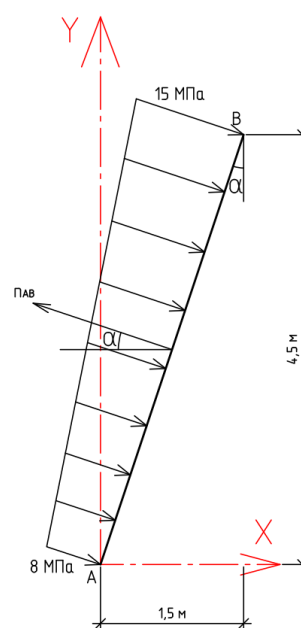
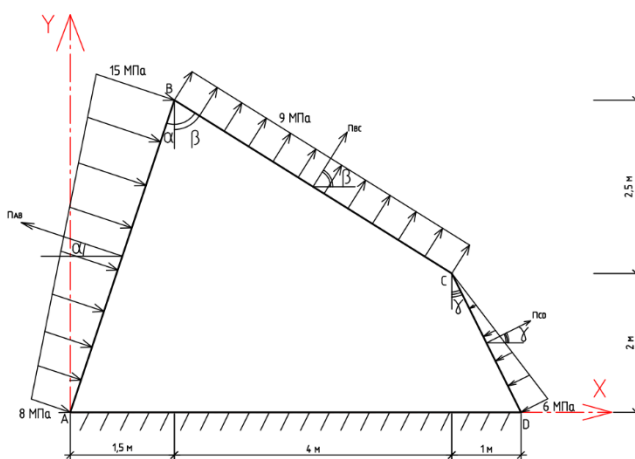
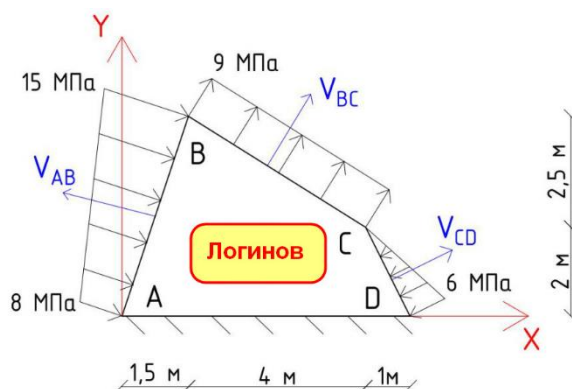
$$0 \text{ м} \leq y \leq 4,5 \text{ м}$$

$$0 \text{ м} \leq x \leq 1,5 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

$$l = \cos \angle x, n_{AB} = -\cos \alpha = -0,95$$

$$m = \cos \angle y, n_{AB} = \sin \alpha = 0,32$$



Изм.	Лист	№ докум	Подпись	Дата

Логинов Р.С. СУЗ 231

Лист

3

Поверхностные силы представим в виде:

$$S(x) = d \cdot x + e$$

$$\begin{cases} 8 = 0 \cdot d + e \\ 15 = 1,5 \cdot d + e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e = 8 \text{ МПа} \\ d = 4,67 \text{ МПа} \end{cases} \rightarrow S(x) = 4,67 \cdot x + 8 \text{ МПа}$$

Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = 0,95 \cdot (4,67 \cdot x + 8) = 4,44 \cdot x + 7,60 \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = -0,32 \cdot (4,67 \cdot x + 8) = -1,49 \cdot x - 2,56 \text{ МПа}$$

Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} 4,44 \cdot x + 7,60 = -0,95 \cdot \sigma_x + 0,32 \cdot \tau_{yx} \\ -1,49 \cdot x - 2,56 = -0,95 \cdot \tau_{xy} + 0,32 \cdot \sigma_y \end{cases}$$

Грань ВС

$$1,5 \text{ м} \leq x \leq 5,5 \text{ м}$$

$$2 \text{ м} \leq y \leq 4,5 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

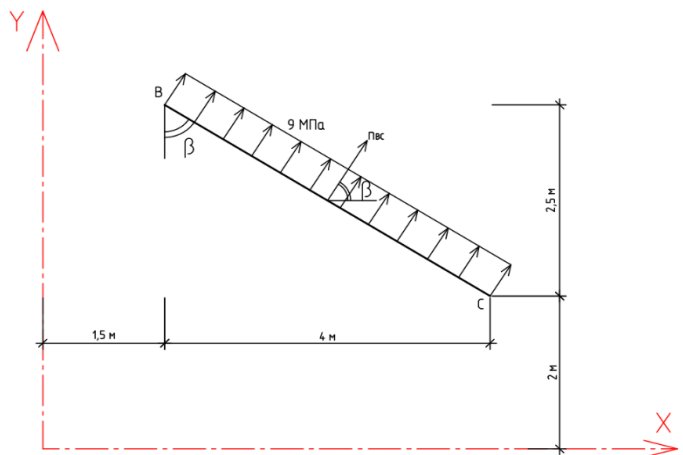
$$l = \cos \angle x, n_{BC} = \cos \beta = 0,53$$

$$m = \cos \angle y, n_{BC} = \sin \beta = 0,85$$

Поверхностные силы

представим в виде:

$$S(x) = 9 \text{ МПа}$$



Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = 0,53 \cdot 9 = 4,77 \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = 0,85 \cdot 9 = 7,65 \text{ МПа}$$

Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} 4,77 = 0,53 \cdot \sigma_x + 0,85 \cdot \tau_{yx} \\ 7,65 = 0,53 \cdot \tau_{xy} + 0,85 \cdot \sigma_y \end{cases}$$

Грань CD

$$5,5 \text{ м} \leq x \leq 6,5 \text{ м}$$

$$0 \text{ м} \leq y \leq 2 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

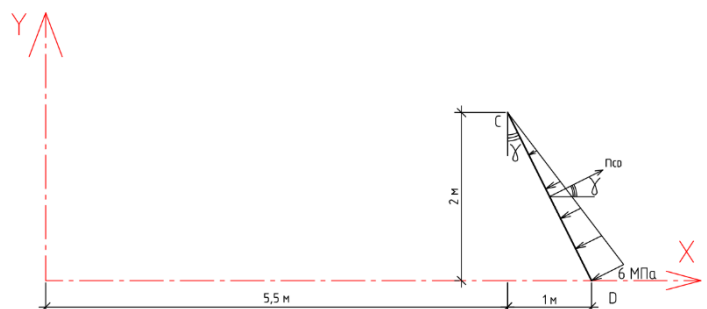
$$l = \cos \angle x, n_{CD} = \cos \gamma = 0,89$$

$$m = \cos \angle y, n_{CD} = \sin \gamma = 0,45$$

Поверхностные силы

представим в виде:

$$S(x) = d \cdot x + e$$



Изм.	Лист	№ докум	Подпись	Дата

$$\begin{cases} 6 = 6,5 \cdot d + e \\ 0 = 5,5 \cdot d + e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e = -33 \text{ МПа} \\ d = 6 \text{ МПа} \end{cases} \rightarrow S(x) = 6 \cdot x - 33 \text{ МПа}$$

Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = -0,89 \cdot (6 \cdot x - 33) = -5,34 \cdot x + 29,37 \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = -0,45 \cdot (6 \cdot x - 33) = -2,70 \cdot x + 14,85 \text{ МПа}$$

Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} -5,34 \cdot x + 29,37 = 0,89 \cdot \sigma_x + 0,45 \cdot \tau_{yx} \\ -2,70 \cdot x + 14,85 = 0,89 \cdot \tau_{xy} + 0,45 \cdot \sigma_y \end{cases}$$

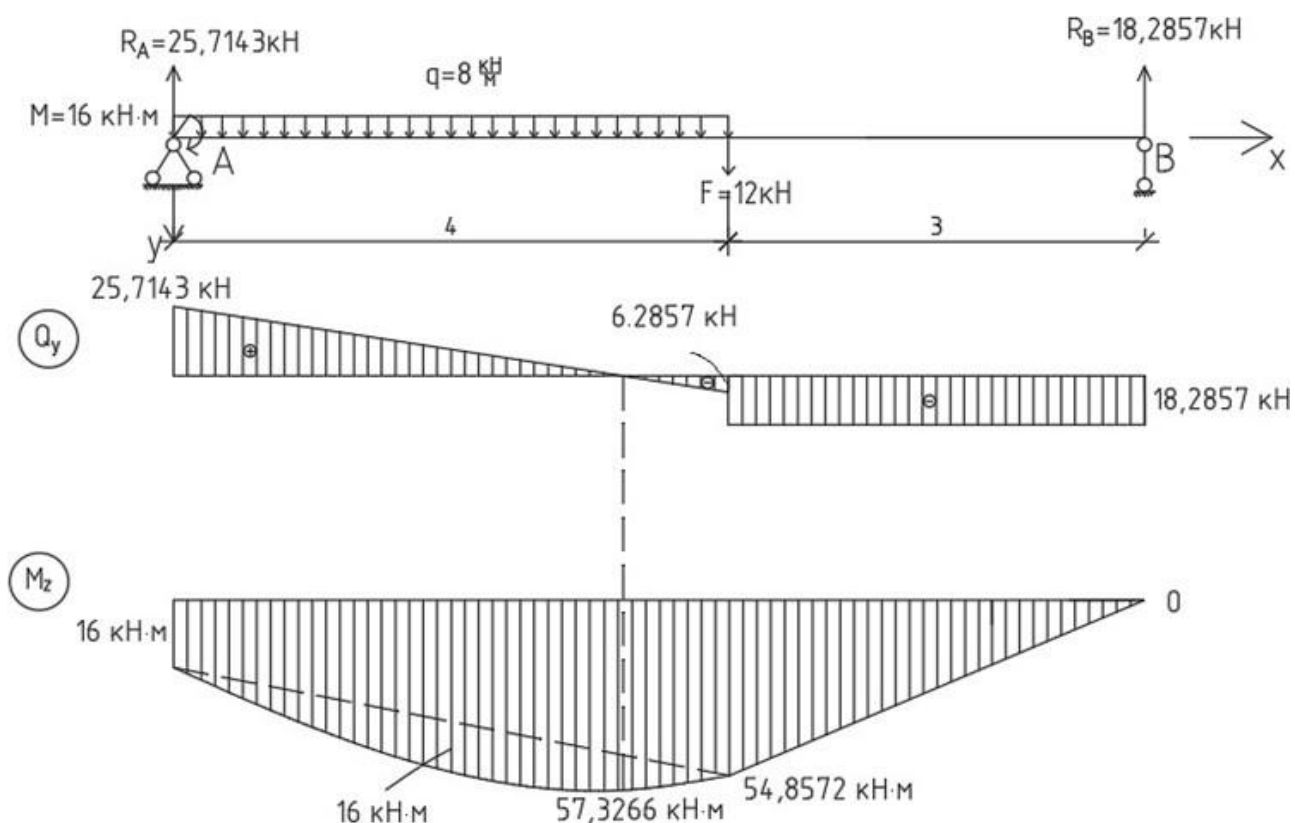
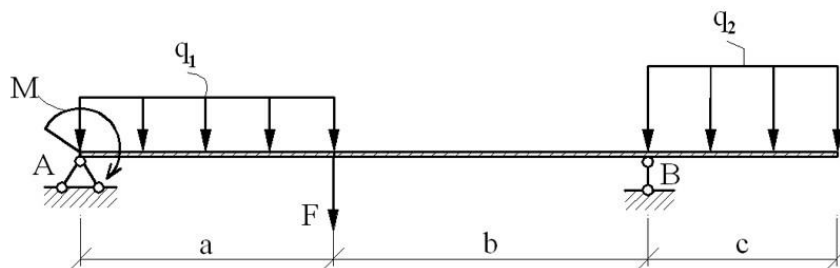
Грань AD

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} &\leq x \leq 6,5 \text{ м} \end{aligned}$$

Так как грань закреплена, то перемещения $u=0$ и $v=0$

Упражнение №2. Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия.

УПР №2 “Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия”									
Ф.И.О.: Логинов									
a, м	b, м	c, м	Нормативные нагрузки	M _н , кН·м	F _н , кН	q _{1н} , кН/м	q _{2н} , кН/м	Коэффициент надежности по нагрузке, γ _f	
4	3	0		16	12	8	0		



1. Определение опорных реакций.

$$\sum M_A = 0; \quad 16 + 8 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 4 - R_B \cdot 7 = 0; \quad R_B = 18,2857 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 7 + 16 - 8 \cdot 4 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 0; \quad R_A = 25,7143 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad 18,2857 + 25,7143 - 8 \cdot 4 - 12 = 0; \quad 0 \approx 0$$

2. Дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

X, Y - интенсивности объемных сил. В нашем случае $X=Y=0$.

3. Участок 1 ($0 \leq x \leq 4$) м.

3.1 Найдем напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):

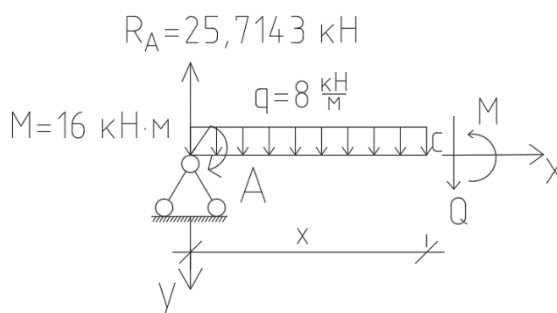
$$\Sigma M_c = 0;$$

$$25,7143x + 16 - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - M = 0;$$

$$M = (-4x^2 + 25,7143x + 16) \text{ кН}\cdot\text{м}$$

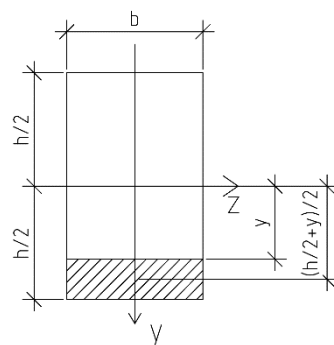
$$\Sigma Y = 0; Q - 25,7143 + 8x = 0;$$

$$Q = (-8x + 25,7143) \text{ кН}$$



$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{M}{J_z} \cdot y = (-4x^2 + 25,7143x + 16) \cdot \frac{y}{J_z} \\ \tau_{xy} = \frac{Q \cdot S_z^\omega}{J_z \cdot b} = \frac{(-8x + 25,7143)}{J_z \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{(-8x + 25,7143)}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

$$S_z^\omega = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad J_z = \frac{bh^3}{12}$$



3.2 Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = (-8x + 25,7143) \cdot \frac{y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -y \cdot \frac{(-8x + 25,7143)}{J_z};$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} (-8x + 25,7143) \cdot \frac{y}{J_z} - y \cdot \frac{(-8x + 25,7143)}{J_z} = 0 \text{ — выполняется} \\ -\frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + 0 \neq 0 \text{ — не выполняется} \end{cases}$$

3.3 Корректировка решения.

Пусть $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \neq 0$, тогда: $-\frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \Rightarrow$

$$\sigma_y = \int \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) dy = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3}\right) + f(x)$$

Произвольную функцию $f(x)$ найдем из уравнений на поверхности:

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{cases}$$

Верхняя грань, $y = -\frac{h}{2} \Rightarrow l = 0; m = -1;$

$$\bar{X} = 0; \bar{Y} = \frac{8}{b};$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \sigma_x - 1 \cdot \tau_{yx} \\ \frac{8}{b} = 0 \cdot \tau_{xy} - 1 \cdot \sigma_y \end{cases}; \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \sigma_y = -\frac{8}{b} \end{cases}$$

Нижняя грань, $y = \frac{h}{2} \Rightarrow l = 0; m = 1;$

$$\bar{X} = 0; \bar{Y} = 0;$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \sigma_x + 1 \cdot \tau_{yx} \\ 0 = 0 \cdot \tau_{xy} + 1 \cdot \sigma_y \end{cases}; \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

Из условий на нижней грани:

$$\tau_{xy}\left(y = \frac{h}{2}\right) = \frac{(-8x + 25,7143)}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) = 0 - \text{выполняется}$$

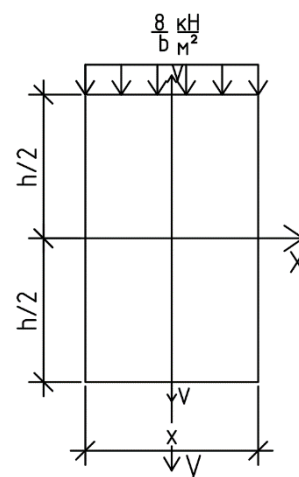
$$\sigma_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3\right) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{h^3}{3 \cdot J_z}$$

$$\sigma_y = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot y^3\right) - \frac{h^3}{3 \cdot J_z}$$

Из условий на верхней грани:

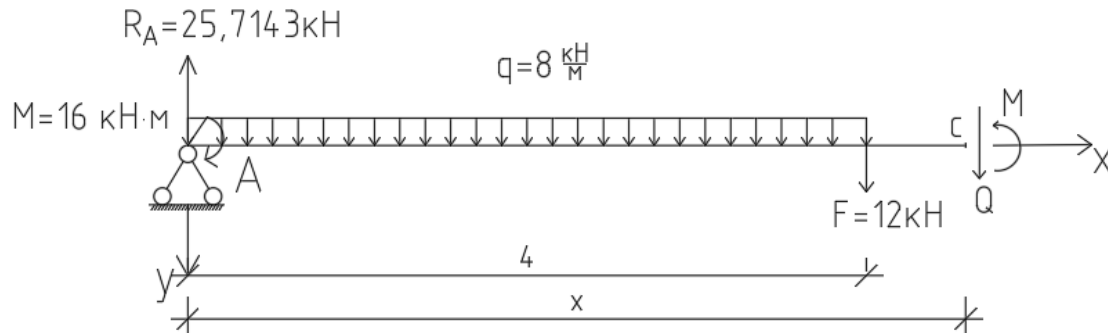
$$\tau_{xy}\left(y = -\frac{h}{2}\right) = \frac{(-8x + 25,7143)}{2 \cdot J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \left(-\frac{h}{2}\right)^2\right) = 0 - \text{выполняется};$$

$$\sigma_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right) - \frac{h^3}{3 \cdot J_z} = -\frac{2h^3}{3J_z} = -\frac{8}{b} - \text{выполняется для прямоугольного сечения.}$$



4. Участок 2 ($4 \text{ м} \leq x \leq 7 \text{ м}$).

4.1 Найдем напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):



$$\Sigma M_c = 0; 16 + 25,7143x - 8 \cdot 4 \cdot (x - 2) - 12 \cdot (x - 4) - M = 0;$$

$$M = (-18,2857x + 128) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\Sigma Y = 0; Q - 25,7143 + 8 \cdot 4 + 12 = 0;$$

$$Q = -18,2857 \text{ кН}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{M}{J_z} \cdot y = (-18,2857x + 128) \cdot \frac{y}{J_z} \\ \tau_{xy} = \frac{Q \cdot S_z^{\omega}}{J_z \cdot b} = \frac{(-18,2857) \cdot b}{J_z \cdot b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{-18,2857}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

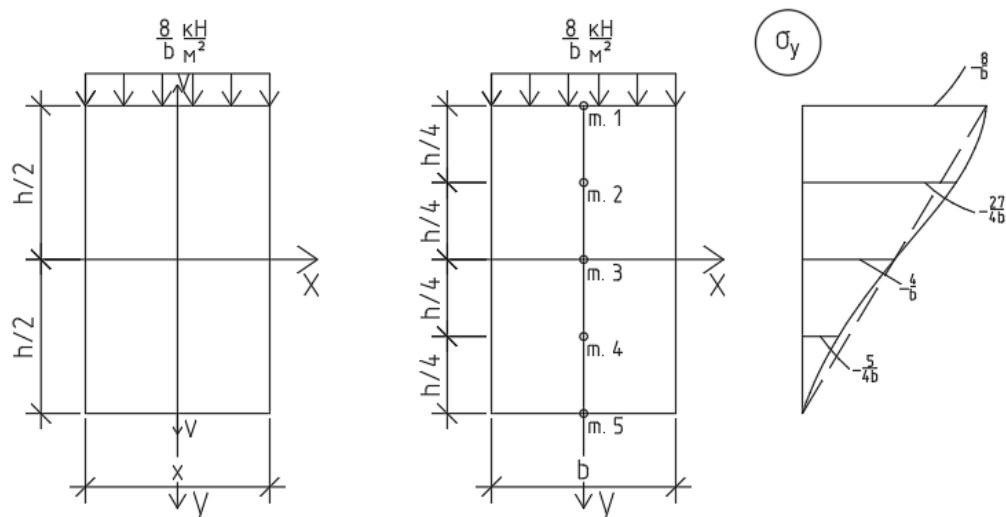
4.2 Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -18,2857 \cdot \frac{y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{18,2857 \cdot y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} -18,2857 \cdot \frac{y}{J_z} + \frac{18,2857 y}{J_z} \equiv 0 - \text{выполняется} \\ 0 + 0 \equiv 0 - \text{выполняется} \end{cases}$$

5. Построение эпюр внутренних усилий. (см. стр.1)

6. Построение эпюры σ_y .



$$\text{т.1: } \sigma_y \left(y = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{8}{b};$$

$$\text{т.2: } \sigma_y \left(y = -\frac{h}{4} \right) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \left(-\frac{h}{4} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{h}{4} \right)^3 \right) - \frac{h^3}{3J_z} = -\frac{9h^3}{16J_z} = -\frac{27}{4b};$$

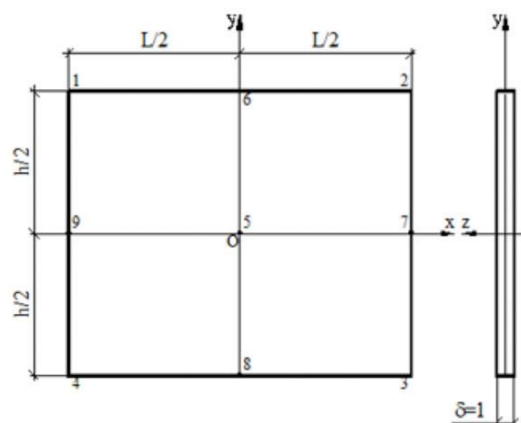
$$\text{т.3: } \sigma_y(y = 0) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right) - \frac{h^3}{3J_z} = -\frac{h^3}{3J_z} = -\frac{4}{b};$$

$$\text{т.4: } \sigma_y \left(y = \frac{h}{4} \right) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{4} \right)^3 \right) - \frac{h^3}{3J_z} = -\frac{4h^3}{48J_z} = -\frac{5}{4b};$$

$$\text{т.5: } \sigma_y \left(y = \frac{h}{2} \right) = \frac{4}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) - \frac{h^3}{3J_z} = 0.$$

Вывод: напряжения в балке, найденные методами сопротивления материалов, удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия только на участках, где не приложена распределенные нагрузки.

Упражнение №3. Решение плоской задачи теории упругости с помощью функции напряжений.



Логинов

Дано:

$$L := 0.9 \text{ м,}$$

$$h := 0.5 \text{ м,}$$

$$\nu := 0.21$$

$$\varphi := 8 \cdot x \cdot y^3$$

$$\delta := 1$$

$$x_a := x_4$$

$$y_a := y_4$$

$$x_b := x_4$$

$$y_b := y_4$$

$$x_c := x_7$$

$$y_c := y_7$$

$$z(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y)$$

$$u_a = 0$$

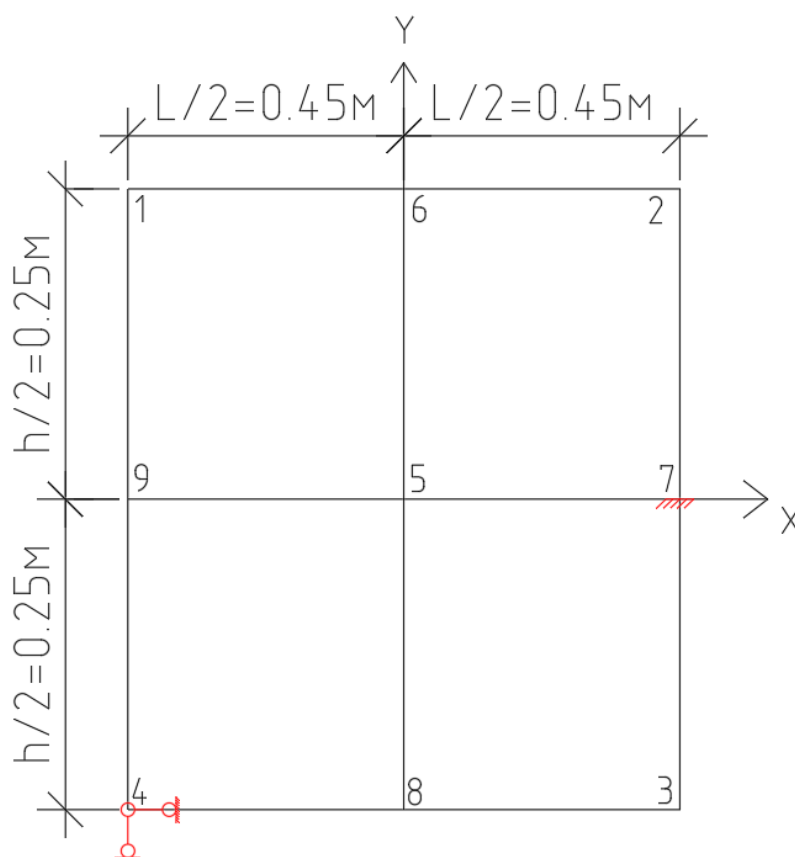
$$v_b = 0$$

$$z_c = 0$$

Вычислить перемещения точки с координатами (x_d, y_d)

$$x_d := x_2$$

$$y_d := y_2$$



1. Проверим выполнение уравнений совместности деформаций.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1); \quad \varphi = 8xy^3;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 8y^3; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 24xy^2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 48xy; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 48x; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 24y^2; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0;$$

Подставляя в уравнение совместности (1), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

Найдем напряжения.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 48xy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -24y^2;$$

2. Вычисление поверхностных сил.

Грань 1-2.

Интервал изменения координат: $-0,45\text{м} \leq x \leq 0,45\text{м}$; $y=0,25\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 90^\circ = 0$; $m = \cos 0^\circ = 1$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 48xy \cdot 0 - 24y^2 \cdot 1 = -24y^2 = -24 \cdot 0,25^2 = -1,5 \text{ Мпа};$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -24y^2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{1-2}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dx d\delta = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} -1,5 dx d\delta = -1,5 \delta \cdot x \Big|_{-0,45}^{0,45} = -1,5 \delta \cdot (0,45 - (-0,45)) = -1,35 \delta;$$

$$R_{1-2}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dx d\delta = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} 0 dx d\delta = 0;$$

$$M_{1-2} = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} (-\bar{Y}) dx d\delta = \int_{-0,45}^{0,45} \int_{-0,45}^{0,45} 0 dx d\delta = 0;$$

Грань 2-3.

Интервал изменения координат: $-0,25 \text{ м} \leq y \leq 0,25 \text{ м}$; $x=0,45\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 0^\circ = 1$; $m = \cos 90^\circ = 0$

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 48xy \cdot 1 - 24y^2 \cdot 0 = 48xy = 48 \cdot 0,45 \cdot y = 21,6y;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -24y^2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -24y^2;$$

Функция $\bar{X}(y)$ линейная, и для построения эпюры достаточно найти:

$$\bar{X}(-0,25) = -5,4 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,25) = 5,4 \text{ МПа};$$

Зависимость $\bar{Y}(y)$ нелинейная, поэтому вычисляем ее через $0,25h=0,125m$

$$\bar{Y}(-0,25) = -1,5 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(-0,125) = -0,375 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0) = 0 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,125) = -0,375 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,25) = -1,5 \text{ МПа};$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{2-3}^x = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{X} dy \delta = 21,6\delta \int_{-0,25}^{0,25} y dy = 21,6\delta \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-0,25}^{0,25} = 10,8\delta \cdot (0,25^2 - (-0,25)^2) = 0;$$

$$R_{2-3}^y = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{Y} dy \delta = -24\delta \int_{-0,25}^{0,25} y^2 dy = -24\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,25}^{0,25} = -8\delta \cdot (0,25^3 - (-0,25)^3) = -0,25\delta;$$

$$M_{2-3} = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{X} y dy \delta = 21,6\delta \int_{-0,25}^{0,25} y^2 dy = 21,6\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,25}^{0,25} = 7,2\delta \cdot (0,25^3 - (-0,25)^3) = 0,225\delta;$$

Грань 3-4.

Интервал изменения координат: $-0,45m \leq x \leq 0,45m$; $y = -0,25m$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 270^\circ = 0$; $m = \cos 180^\circ = -1$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 48xy \cdot 0 - 24y^2 \cdot (-1) = 24y^2 = 24 \cdot (-0,25)^2 = 1,5 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -24y^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0;$$

$$R_{3-4}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dx \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 1,5 dx \delta = 1,5\delta \cdot x \Big|_{-0,45}^{0,45} = 1,5\delta \cdot (0,45 - (-0,45)) = 1,35\delta;$$

$$R_{3-4}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dx \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 dx \delta = 0;$$

$$M_{3-4} = \int_{-0,45}^{0,45} (-\bar{Y}) x dx \delta = \int_{-0,45}^{0,45} 0 dx \delta = 0;$$

Грань 4-1.

Интервал изменения координат: $-0,25\text{м} \leq y \leq 0,25\text{м}$; $x = -0,45\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 180^\circ = -1$; $m = \cos 270^\circ = 0$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = 48xy \cdot (-1) - 24y^2 \cdot 0 = -48xy = -48 \cdot (-0,45) \cdot y = 21,6y;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = -24y^2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 24y^2;$$

Функция $\bar{X}(y)$ линейная, и для построения эпюры достаточно найти:

$$\bar{X}(-0,25) = -5,4 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,25) = 5,4 \text{ МПа};$$

Зависимость $\bar{Y}(y)$ нелинейная, поэтому вычисляем ее через $0,25h=0,125\text{м}$

$$\bar{Y}(-0,25) = 1,5 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(-0,125) = 0,375 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0) = 0 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,125) = 0,375 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,25) = 1,5 \text{ МПа};$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{4-1}^x = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{X} dy \delta = 21,6\delta \int_{-0,25}^{0,25} y dy = 21,6\delta \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-0,25}^{0,25} = 10,8\delta \cdot (0,25^2 - (-0,25)^2) = 0;$$

$$R_{4-1}^y = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{Y} dy \delta = 24\delta \int_{-0,25}^{0,25} y^2 dy = 24\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,25}^{0,25} = 8\delta \cdot (0,25^3 - (-0,25)^3) = 0,25\delta;$$

$$M_{4-1} = \int_{-0,25}^{0,25} \bar{X} y dy \delta = 21,6\delta \int_{-0,25}^{0,25} y^2 dy = 21,6\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,25}^{0,25} = 7,2\delta \cdot (0,25^3 - (-0,25)^3) = 0,225\delta;$$

Проверка равновесия пластины в целом:

$$\sum \bar{X} = R_{1-2}^x + R_{2-3}^x + R_{3-4}^x + R_{4-1}^x = (-1,35\delta) + 0 + 1,35\delta + 0 \equiv 0;$$

$$\sum \bar{Y} = R_{1-2}^y + R_{2-3}^y + R_{3-4}^y + R_{4-1}^y = 0 + (-0,25\delta) + 0 + 0,25\delta \equiv 0;$$

$$\sum m_5 = M_{1-2} - R_{1-2}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{2-3} + R_{2-3}^y \cdot \frac{L}{2} + M_{3-4} - R_{3-4}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{4-1} + R_{4-1}^y \cdot \frac{L}{2} =$$

$$0 - 1,35\delta \cdot 0,25 + 0,225\delta + 0,25\delta \cdot 0,45 + 0 - 1,35\delta \cdot 0,25 + 0,225\delta + 0,25\delta \cdot 0,45 \equiv 0$$

					Логинов Р.С. СУЗ 231	Лист
Изм.	Лист	№ докум	Подпись	Дата		14

$$\frac{24x^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{53,04y^2}{E} - \frac{df(y)}{dy};$$

$$\frac{24x^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = a; -\frac{53,04y^2}{E} - \frac{df(y)}{dy} = a;$$

$$g(x) = -\frac{24x^3}{3E} + ax + b = -\frac{8x^3}{E} + ax + b;$$

$$f(y) = -\frac{53,04y^3}{3E} - ay + c = -\frac{17,68y^3}{E} - ay + c;$$

$$V = -\frac{5,04xy^2}{E} - \frac{8x^3}{E} + ax + b;$$

$$U = \frac{24x^2y}{E} - \frac{17,68y^3}{E} - ay + c;$$

Постоянные а, b, с определим из заданных условий:

1) $x = -0,45\text{м}; y = -0,25\text{м}; U=0;$

$$0 = \frac{24 \cdot (-0,45)^2 \cdot (-0,25)}{E} - \frac{17,68 \cdot (-0,25)^3}{E} - a \cdot (-0,25) + c = -\frac{0,939}{E} + 0,25 \cdot a + c$$

2) $x = -0,45\text{м}; y = -0,25\text{м}; V=0;$

$$0 = -\frac{5,04 \cdot (-0,45) \cdot (-0,25)^2}{E} - \frac{8 \cdot (-0,45)^3}{E} + a \cdot (-0,45) + b = \frac{0,871}{E} - a \cdot 0,45 + b;$$

Для т.7 $x = 0,45\text{м}; y = 0\text{м}; \frac{\partial V}{\partial x} = 0;$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-5,04y^2}{E} - \frac{24x^2}{E} + a;$$

$$0 = \frac{-5,04 \cdot 0^2}{E} - \frac{24 \cdot 0,45^2}{E} + a;$$

Найдем а:

$$a = \frac{4,86}{E}$$

Найдем с:

$$c = \frac{0,939}{E} - 0,25 \cdot \frac{4,86}{E} = -\frac{0,276}{E};$$

Найдем b:

$$b = -\frac{0,871}{E} + \frac{4,86}{E} \cdot 0,45 = \frac{1,316}{E};$$

Подставим значения производных постоянных:

$$V = -\frac{5,04xy^2}{E} - \frac{8x^3}{E} + \frac{4,86}{E} \cdot x + \frac{1,316}{E};$$

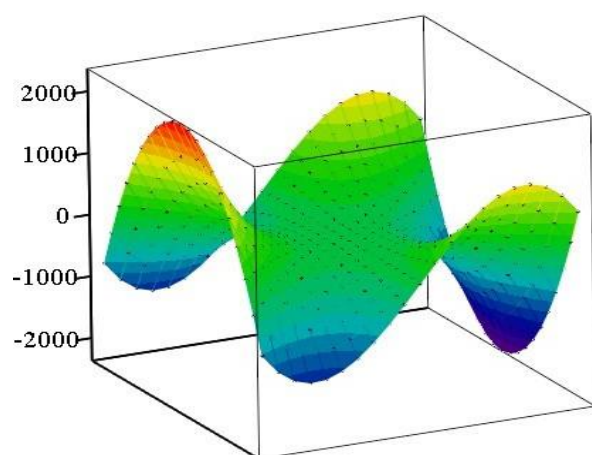
$$U = \frac{24x^2y}{E} - \frac{17,68y^3}{E} - \frac{4,86}{E} \cdot y - \frac{0,276}{E};$$

Для точки т.2 с координатами $x = 0,45\text{м}$; $y = 0,25\text{м}$;

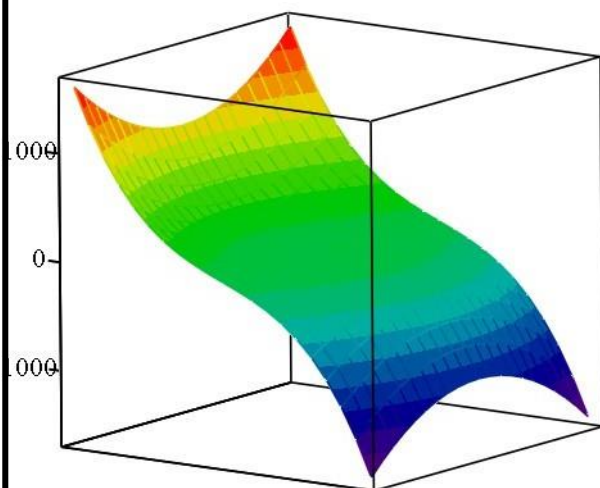
$$V = -\frac{5,04 \cdot 0,45 \cdot 0,25^2}{E} - \frac{8 \cdot 0,45^3}{E} + \frac{4,86}{E} \cdot 0,45 + \frac{1,316}{E} = \frac{2,632}{E};$$

$$U = \frac{24 \cdot 0,45^2 \cdot 0,25}{E} - \frac{17,68 \cdot 0,25^3}{E} - \frac{4,86}{E} \cdot 0,25 - \frac{0,276}{E} = -\frac{0,552}{E}$$

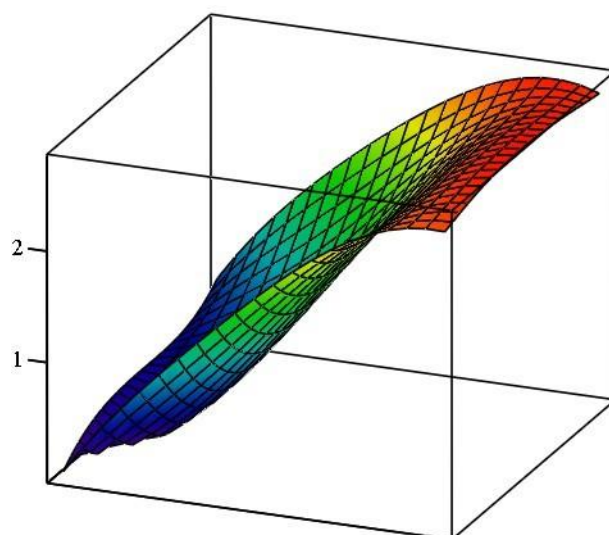
Построим графики функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ и $D(x,y)$ при $E=1$



$u(x,y)$



$v(x,y)$

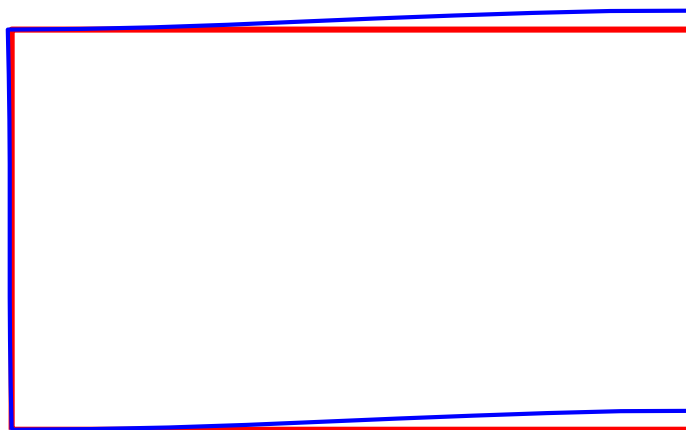


$\Delta(x,y)$

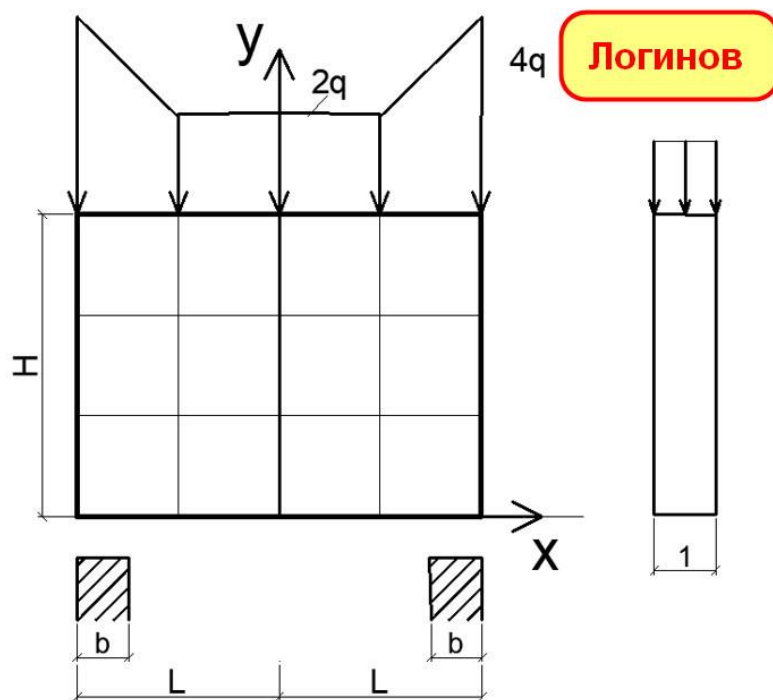
Контур пластины в исходном и деформированном виде.

При необходимости измените масштаб деформаций m и нажмите клавишу F9.

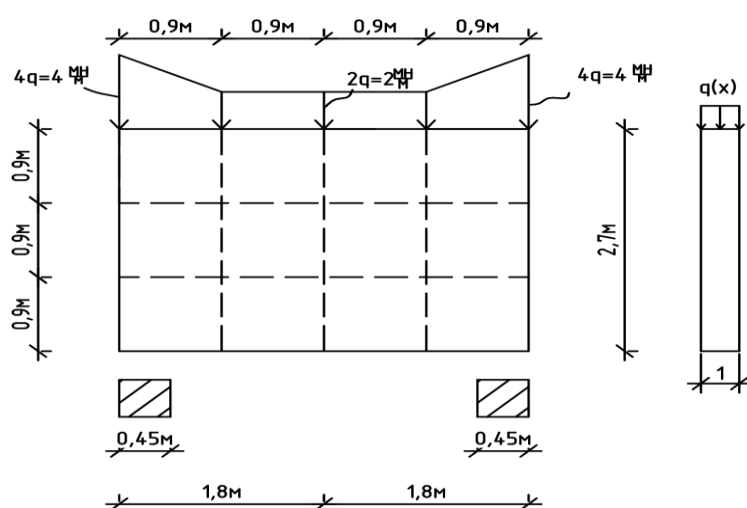
$m = 0.00$

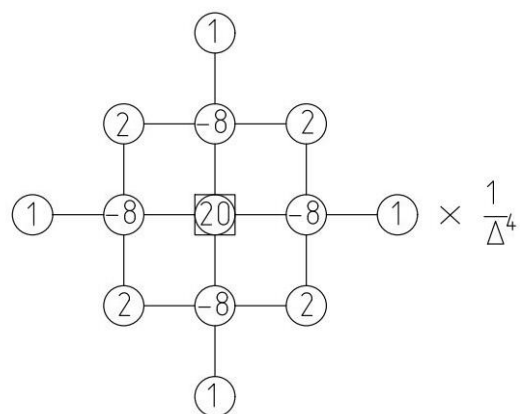
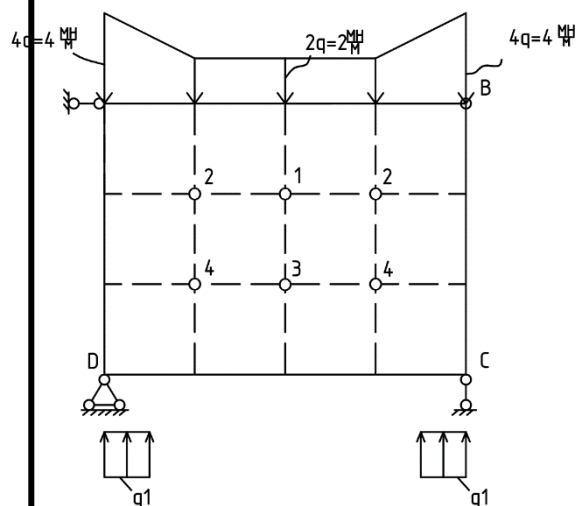


Упражнение №4. Расчёт балки-стенки



$$L=2\Delta, \quad H=3\Delta, \quad b=\Delta/2, \quad \Delta=0.9\text{м}, \quad q=1\text{МН/м}$$

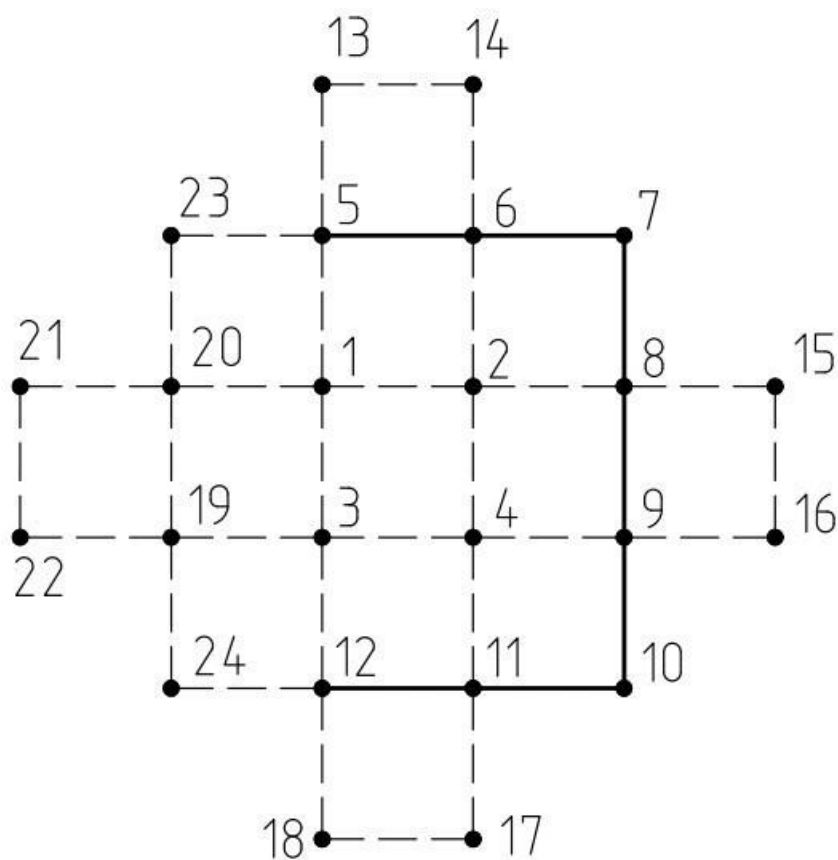




1. Бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

$$20 \cdot \varphi_{ij} - 8(\varphi_{i-1j} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij-1} + \varphi_{ij+1}) + 2(\varphi_{i-1j-1} + \varphi_{i+1j-1} + \varphi_{i-1j+1} + \varphi_{i+1j+1}) + \varphi_{i-2j} + \varphi_{i+2j} + \varphi_{ij-2} + \varphi_{ij+2} = 0$$

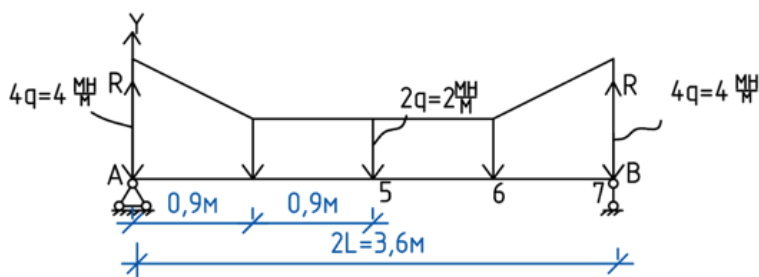


$$\begin{aligned}
 &20\varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_{20} + \varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_{23} + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_{19}) + \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{21} + \varphi_8 = 0; \\
 &20\varphi_2 - 8 \cdot (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_3) + \varphi_{11} + \varphi_{14} + \varphi_{20} + \varphi_{15} = 0; \quad (1) \\
 &20\varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_{12} + \varphi_{19}) + 2 \cdot (\varphi_2 + \varphi_{11} + \varphi_{24} + \varphi_{20}) + \varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_{18} + \varphi_{22} = 0; \\
 &20\varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \varphi_6 + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_{19} = 0.
 \end{aligned}$$

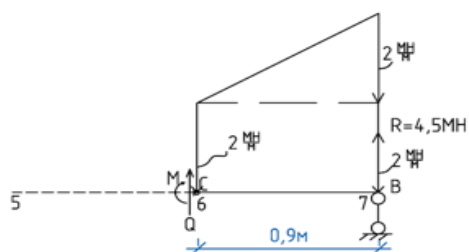
Исключим углы на контуре и законтурные узлы

2. Построим эпюры М и N в стержнях соответствующей рамы.

Стержень АВ



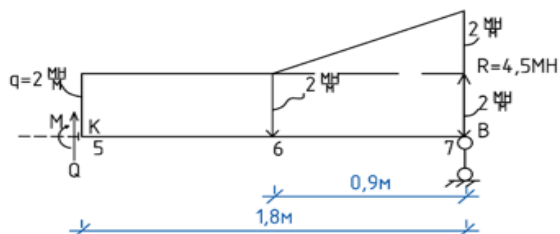
$$\begin{aligned}
 \sum y = 0 \\
 2R - 2 \cdot \frac{(2 + 4)}{2} \cdot 0.9 - 2 \cdot 2 \cdot 0.9 = 0 \\
 R = 4.5 \text{ MN}
 \end{aligned}$$



$$\sum M_c = 0$$

$$\begin{aligned}
 M - 4.5 \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0.9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.9 \cdot 0.45 = 0 \\
 M_6 = 2.7 \text{ MN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

$$\sum m_k = 0$$



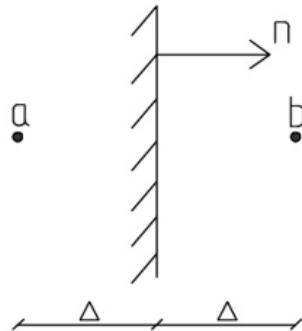
$$\begin{aligned}
 M - 4.5 \cdot 1.8 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0.9 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0.9 + 0.9 \right) + 2 \cdot 0.9 \cdot (0.9 + 0.45) + 2 \cdot 0.9 \cdot 0.45 = 0 \\
 M_5 = 3.51 \text{ MN} \cdot \text{m} \\
 M_7 = 0 \text{ MN} \cdot \text{m} \\
 N_5 = N_6 = N_7 = 0
 \end{aligned}$$

На контуре $\varphi = M, \frac{\partial \varphi}{\partial n} = N$

$$\varphi_5 = M_5 = 3,51$$

$$\varphi_6 = M_6 = 2,7$$

$$\varphi_7 = M_7 = 0$$



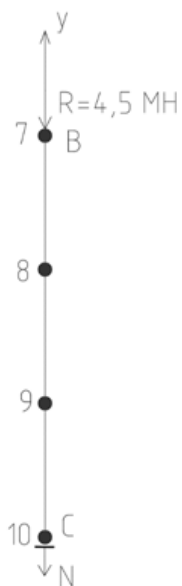
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2\Delta} = N$$

$$\varphi_b = \varphi_a + 2\Delta N$$

$$\text{т.5 } \varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot 0 \quad \varphi_{13} = \varphi_1$$

$$\text{т.6 } \varphi_{14} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot 0 \quad \varphi_{14} = \varphi_2$$

Стержень ВС



$$\sum y = 0$$

$$-R - N = 0$$

$$N = -R = -4,5 \text{ МН}$$

$$N_8 = N_9 = -4,5 \text{ МН}$$

$$\varphi_{15} = \varphi_2 + 2\Delta \cdot N_8 = \varphi_2 + 2 \cdot 0,9 \cdot (-4,5) = \varphi_2 - 8,1$$

$$\varphi_{16} = \varphi_4 - 8,1$$

$$M_8 = M_9 = 0$$

$$\varphi_8 = \varphi_9 = 0$$

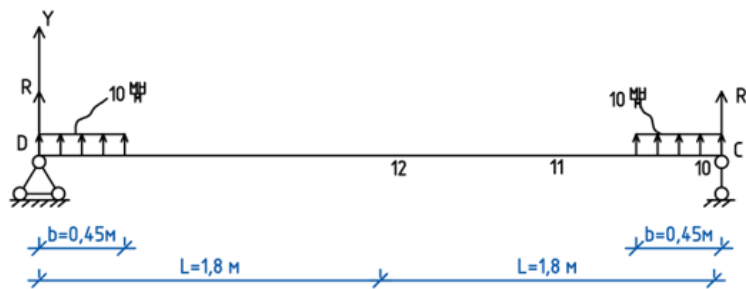
Стержень CD

Найдем q_1 из уравнения балки-стенки:

$$\sum y = 0$$

$$2 \cdot q_1 \cdot b - 2 \cdot \frac{(2+4)}{2} \cdot 0,9 - 2 \cdot 2 \cdot 0,9 = 0$$

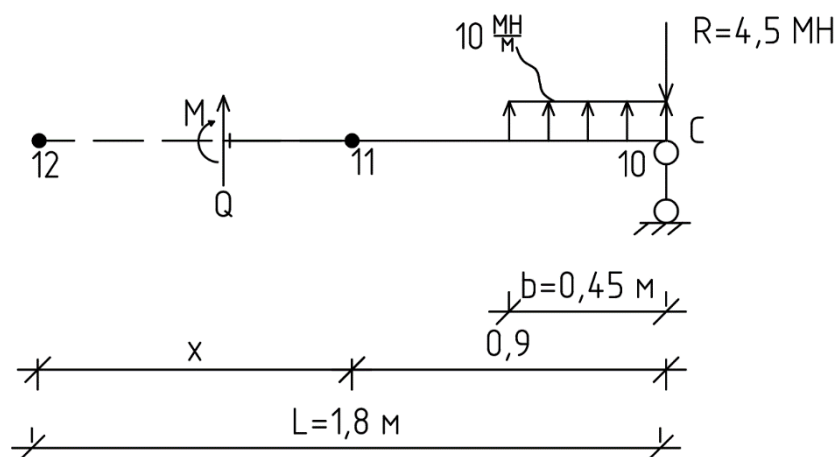
$$q_1 = 10 \frac{\text{МН}}{\text{м}}$$



$$\Sigma y = 0$$

$$2R + 2 \cdot 10 \cdot b = 0$$

$$R_C = R_D = -10 \cdot 0,45 = -4,5 \text{ МН}$$



$$0 \leq x \leq 0,9 \text{ м}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M + 4,5 \cdot (0,9 + x) - 10 \cdot 0,45 \cdot (0,675 + x) = 0$$

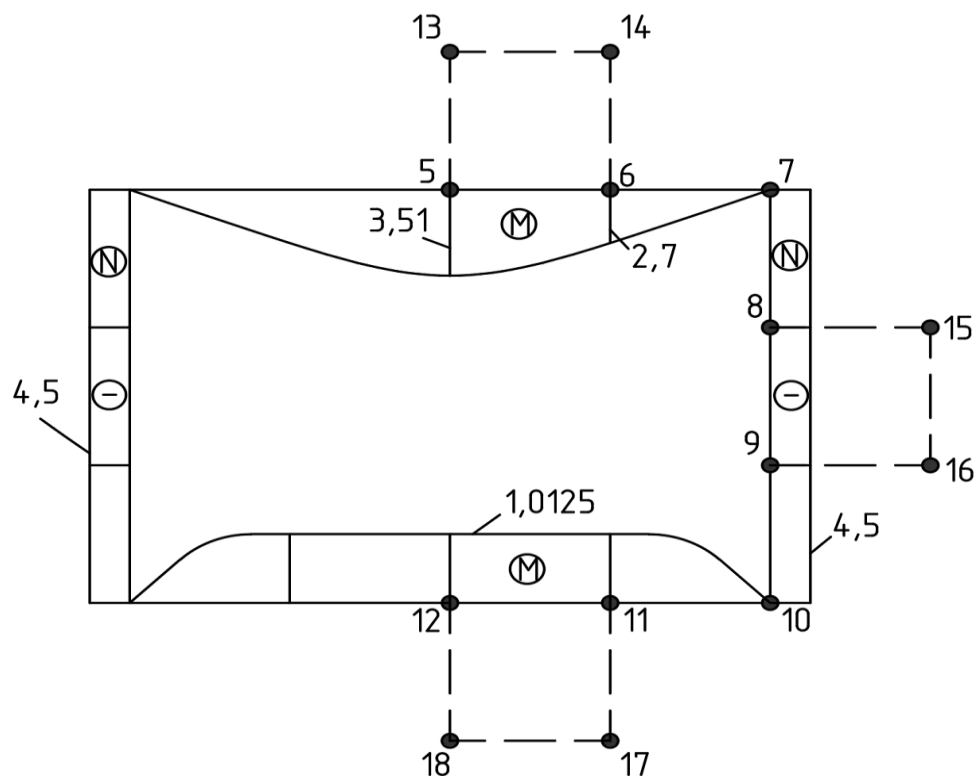
$$M = -4,5 \cdot (0,9 + x) + 10 \cdot 0,45 \cdot (0,675 + x)$$

$$M_{11} = -1,0125 \text{ МН} \cdot \text{м}$$

$$M_{12} = -1,0125 \text{ МН} \cdot \text{м}$$

$$M_{10} = 0 \text{ МН} \cdot \text{м}$$

$$N_{12} = N_{11} = N_{10} = 0$$



На контуре: если ординаты эпюры M , отложенные со стороны растянутого волокна, направлены во внутрь контура, то $\varphi = +M$.

$N > 0$, если соответствует растяжению.

Имеем, таким образом:

$$\varphi_5 = 3,51; \varphi_6 = 2,7; \varphi_7 = 0; \varphi_8 = 0; \varphi_9 = 0; \varphi_{10} = 0; \varphi_{11} = 1,0125;$$

$$\varphi_{12} = 1,0125; \varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot N_5 = \varphi_1; \varphi_{14} = \varphi_2;$$

$$\varphi_{15} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{15} = \varphi_2 - 8,1 \quad \varphi_{16} = \varphi_4 - 8,1;$$

$$\varphi_{17} = \varphi_4 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{11} = \varphi_4; \varphi_{18} = \varphi_3$$

По симметрии:

$$\varphi_{19} = \varphi_4; \varphi_{20} = \varphi_2; \varphi_{21} = \varphi_8 = 0; \varphi_{22} = \varphi_9 = 0; \varphi_{23} = \varphi_6 = 2,7; \varphi_{24} = \varphi_{11} = 1,0125;$$

3. Подставим значения φ в систему (1):

$$20\varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_2 + 3,51 + \varphi_3) + 2 \cdot (2,7 + 2,7 + \varphi_4 + \varphi_4) + 1,0125 + \varphi_1 + 0 + 0 = 0;$$

$$21\varphi_1 - 16\varphi_2 - 8\varphi_3 + 4\varphi_4 = 16,2675;$$

$$20\varphi_2 - 8 \cdot (2,7 + 0 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (3,51 + 0 + 0 + \varphi_3) + 1,0125 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 - 8,1 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 23\varphi_2 + 2\varphi_3 - 8\varphi_4 = 21,6675;$$

$$20\varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + 1,0125 + \varphi_4) + 2 \cdot (\varphi_2 + 1,0125 + 1,0125 + \varphi_2) + 3,51 + 0 + \varphi_3 + 0 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 4\varphi_2 + 21\varphi_3 - 16\varphi_4 = 0,54;$$

$$20\varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + 0 + 1,0125 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + 0 + 0 + 1,0125) + 2,7 + \varphi_4 - 8,1 + \varphi_4 + \varphi_4 = 0.$$

$$2\varphi_1 - 8\varphi_2 - 8\varphi_3 + 23\varphi_4 = 11,475;$$

Окончательно в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 21 & -16 & -8 & 4 \\ -8 & 23 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & 21 & -16 \\ 2 & -8 & -8 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,2675 \\ 21,6675 \\ 0,54 \\ 11,475 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Решение системы (2):

$$\varphi_1 = 3,136 \text{ МН};$$

$$\varphi_2 = 2,485 \text{ МН};$$

$$\varphi_3 = 2,147 \text{ МН};$$

$$\varphi_4 = 1,837 \text{ МН};$$

4. Рассмотрим равновесие балки-стенки:

Касательные напряжения на оси симметрии равны нулю.

Найдем напряжение σ_x в т.5, 13, 12.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \boxed{-2} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \cdot \frac{1}{\Delta^2}$$

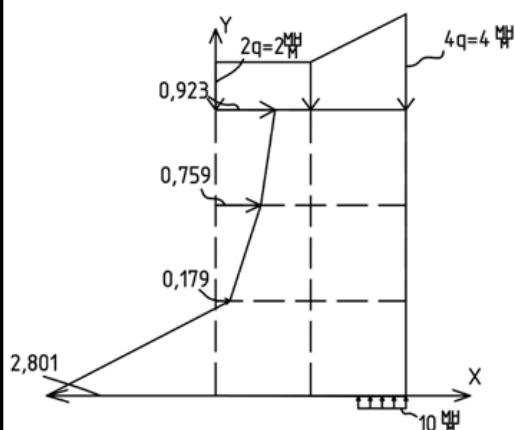
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_{ij-1} - 2 \cdot \varphi_{ij} + \varphi_{ij+1}}{\Delta^2}$$

$$\sigma_x^{(5)} = \frac{\varphi_{13} - 2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1}{\Delta^2} = \frac{3,136 - 2 \cdot 3,51 + 3,136}{0,9^2} = -0,923 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{\varphi_5 - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_3}{\Delta^2} = \frac{3,51 - 2 \cdot 3,136 + 2,147}{0,9^2} = -0,759 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_3 + \varphi_{12}}{\Delta^2} = \frac{3,136 - 2 \cdot 2,147 + 1,0125}{0,9^2} = -0,179 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(12)} = \frac{\varphi_3 - 2 \cdot \varphi_{12} + \varphi_{18}}{\Delta^2} = \frac{2,147 - 2 \cdot 1,0125 + 2,147}{0,9^2} = 2,801 \text{ МПа};$$



$$\sum y = 0;$$

$$-\frac{(2+4)}{2} \cdot 0,9 - 0,9 \cdot 2 + 10 \cdot 0,45 = 0 - \text{верно}$$

$$\sum x = 0;$$

$$\frac{0,923 + 0,759}{2} \cdot 0,9 + \frac{0,759 + 0,179}{2} \cdot 0,9$$

$$+ \frac{0,179 - 2,801}{2} \cdot 0,9 = 0 - \text{верно}$$

5. Рассмотрим равновесие следующей части балки-стенки:

Касательные напряжения должны равняться нулю.

AD-ось симметрии; BC-свободная сторона

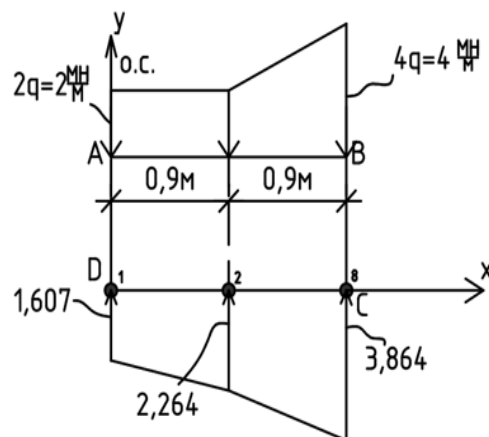
Найдем напряжение σ_y в т.1, 2, 8

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \textcircled{1} - \textcircled{-2} - \textcircled{1} \times \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sigma_y^{(1)} = (\varphi_{20} - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{2,485 - 2 \cdot 3,136 + 2,485}{0,9^2} = -1,607 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(2)} = (\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_2 + \varphi_8) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{3,136 - 2 \cdot 2,485 + 0}{0,9^2} = -2,264 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(8)} = (\varphi_2 - 2 \cdot \varphi_8 + \varphi_{15}) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{2,485 - 2 \cdot 0 + 2,485 - 8,1}{0,9^2} = -3,864 \text{ МПа};$$

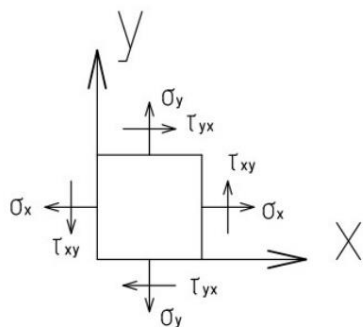


$$\Sigma y = 0$$

$$-\frac{(2+4)}{2} \cdot 0,9 - 0,9 \cdot 2 + \frac{1,607 + 2,264}{2} \cdot 0,9 + \frac{2,264 + 3,864}{2} \cdot 0,9 = 0 - \text{верно}$$

6. Рассмотрим часть 6-7-10-11.

Правило знаков:



В узлах 6 и 11 τ_{xy} должны равняться нулю.

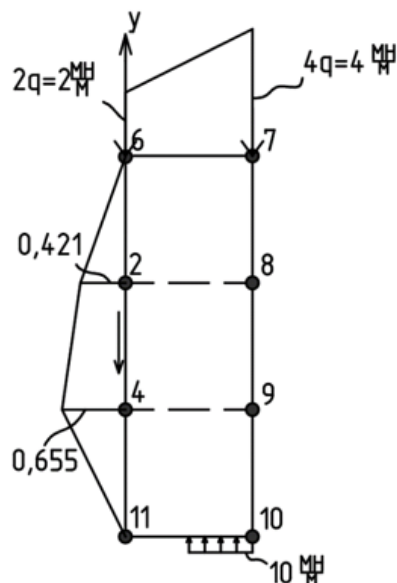
Найдем напряжения τ_{xy} в т.2, 4 :

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \approx$$

$$\times \frac{1}{4\Delta^4}$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = (\varphi_5 - \varphi_7 + \varphi_9 - \varphi_3) \cdot \frac{1}{4\Delta^2} = \frac{3,51 - 0 + 0 - 2,147}{4 \cdot 0,9^2} = 0,421 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy}^{(4)} = (\varphi_1 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}) \cdot \frac{1}{4\Delta^2} = \frac{3,136 - 0 + 0 - 1,0125}{4 \cdot 0,9^2} = 0,655 \text{ МПа};$$



$$\Sigma y = 0$$

$$10 \cdot 0,45 - \frac{(2 + 4)}{2} \cdot 0,9 - \frac{0,421 + 0,655}{2} \cdot 0,9 -$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,421 \cdot 0,9 - \frac{1}{2} \cdot 0,655 \cdot 0,9 = 0,832 \neq 0$$

$h:=L/40$ -шаг сетки

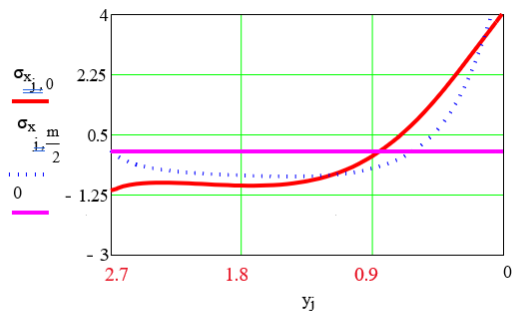
Построим график напряжений
Шаг сетки: $h=0.045$

ORIGIN:=0
 $j:=0..n+1$

$y_j:=H-jh$

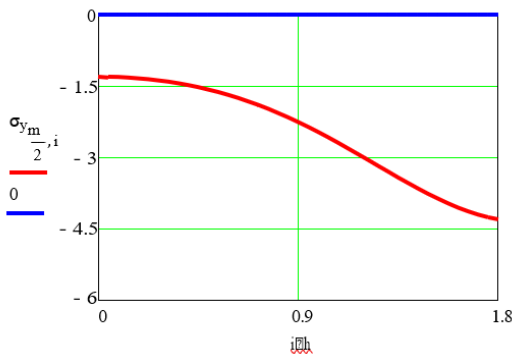
Вертикальное сечение $x=0$

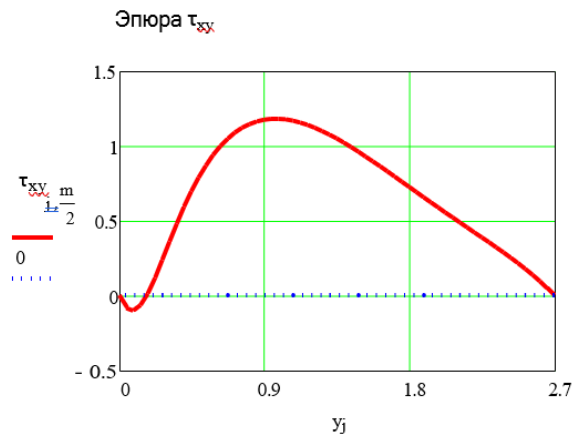
Эпюра σ_x



$i:=0..m$ $x_i:=i\cdot h$

Эпюра σ_y





Проверка равновесия $\underline{i}_i := 0$

Вертикальное сечение ($x=0$)

$$\Sigma x = 0 \quad \underline{j}_i := \frac{h}{2} \cdot \left(\sigma_{x_{0,i}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sigma_{x_{k,i}} + \sigma_{x_{n+1,i}} \right) \quad J = 0$$

$$\Sigma y = 0 \quad \text{Горизонтальное сечение} \quad j := \frac{n+1}{2} \quad \underline{j}_i := 2$$

$$\underline{j}_i := \frac{h}{2} \cdot \left(\sigma_{y_{j,0}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{y_{j,k}} + \sigma_{y_{j,m}} \right) - R \quad J = 0$$

$$\Sigma y = 0 \quad \text{Вертикальное сечение} \quad \underline{j}_i := \frac{m}{2}$$

$$\underline{j}_i := \frac{-h}{2} \cdot \left(\tau_{xy_{0,i}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \tau_{xy_{k,i}} + \tau_{xy_{n+1,i}} \right) + \int_{i \cdot h}^L g(s) ds + q l \cdot b \quad J = -0.001$$